

جامعة البعث

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السنة الثانية

# تحليل متجهات

سلام نصحيح

تمارين دورات الفيزياء

11

تمرين 11: أوجد حجم متوازي السطوح الذي يحدوه  
 $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$  ,  $\vec{B} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$  ,  $\vec{C} = -\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$

الحل:

$$V = |\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})| = \left| \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= |14 + 3 + 3| = 20$$

تمرين 12: إذا كان

أوجد

$$\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{A} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$|(2\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - 2\vec{B})|$$

الحل:

$$2\vec{A} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow 2\vec{A} + \vec{B} = 5\vec{i} - \vec{k}$$

$$2\vec{A} - \vec{B} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$(2\vec{A} + \vec{B}) \times (2\vec{A} - \vec{B}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 28\vec{j} - 20\vec{k}$$

$$|(2\vec{A} + \vec{B}) \times (2\vec{A} - \vec{B})| = \sqrt{16 + 784 + 400} = \sqrt{1200} = 10\sqrt{12} = 20\sqrt{3}$$

تمرين 13: برهن أن الزاوية بين متجه الموضع  $\vec{r}(t)$  وبين متجه السرعة  $\vec{v}(t)$  هي  $\theta = \frac{\pi}{4}$

الحل:

$$\vec{r}(t) = e^t \cos t \vec{i} + e^t \sin t \vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t) \vec{i} + (e^t \sin t + e^t \cos t) \vec{j}$$

15

$$\cos \theta = \frac{|\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t)|}{|\vec{r}(t)| \cdot |\vec{r}'(t)|}$$

$$|\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t)| = |e^{2t} \cos^2 t + \cancel{-e^{2t} \sin t \cos t} + e^{2t} \sin^2 t + \cancel{e^{2t} \sin t \cos t}|$$

$$= e^{2t}$$

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t} = e^t$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t - 2e^{2t} \sin t \cos t + e^{2t} \sin^2 t + e^{2t} \cos^2 t + 2e^{2t} \sin t \cos t}$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{2e^{2t}} = \sqrt{2} e^t$$

$$\cos \theta = \frac{e^{2t}}{e^t \cdot \sqrt{2} e^t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

ممكن ان يكون اذا كان

$$\vec{A} = x^2 y \vec{i} + y^2 z \vec{j} + z^2 x \vec{k}$$

$$\phi = xy + yz + zx$$

$$(3, -1, 2) \text{ عند النقطة } \vec{A}, \vec{\nabla} \phi, \phi \vec{\nabla} \cdot \vec{A}, (\vec{\nabla} \phi) \times \vec{A}$$

أب

الحل:

$$\vec{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k}$$

$$\vec{\nabla} \phi = (y+z) \vec{i} + (x+z) \vec{j} + (x+y) \vec{k}$$

$$\phi \vec{\nabla} = \phi \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \phi \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \phi \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

$$\vec{\nabla} \phi \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ y+z & x+z & x+y \\ x^2 y & y^2 z & z^2 x \end{vmatrix} = (z^2 x^2 + z^3 x - y^2 z x - y^3 z) \vec{i}$$

$$+ (x^3 y + x^2 y^2 - z^2 x y - z^3 x) \vec{j} + (y^3 z + y^2 z^2 - x^3 y - x^2 y z) \vec{k}$$



$$\left. (\vec{\nabla} \phi \times \vec{A}) \right|_{(3, -1, 2)} = (36 + 24 - 6 + 2) \vec{i} + (-27 + 3 + 12 - 24) \vec{j} + (-2 + 4 + 27 + 18) \vec{k} = 56 \vec{i} - 36 \vec{j} + 47 \vec{k}$$

$$\phi \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \phi \cdot \frac{\partial}{\partial x} (x^2 y) + \phi \frac{\partial}{\partial y} (y^2 z) + \phi \frac{\partial}{\partial z} (z^2 x) = (xy + yz + zx) [2xy + 2yz + 2zx] = 2(xy + yz + zx)^2$$

$$\left. \phi \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right|_{(3, -1, 2)} = 2(-3 - 2 + 6)^2 = 2$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \phi &= x^2 y (y + z) + y^2 z (x + z) + z^2 x (x + y) = \\ &= x^2 y^2 + x^2 y z + x y^2 z + y^2 z^2 + z^2 x^2 + z^2 x y \\ &= x^2 y^2 + y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y z + x y^2 z + x y z^2 \end{aligned}$$

$$\left. \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \phi \right|_{(3, -1, 2)} = 9 + 4 + 36 - 18 + 6 - 12 = 25$$

تمرین ۱۵: اِذا كان

$$\vec{A} \times \vec{B} = 8 \vec{i} - 14 \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = 5 \vec{i} + 3 \vec{j} + 2 \vec{k}$$

أوجد  $\vec{A}$  و  $\vec{B}$

الحل: لنفرض  $\vec{A} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$  و  $\vec{B} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$

$$\vec{B} = (5 - a_1) \vec{i} + (3 - a_2) \vec{j} + (2 - a_3) \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 5 - a_1 & 3 - a_2 & 2 - a_3 \end{vmatrix} = (2a_2 - a_2 a_3 - 3a_3 + a_2 a_3) \vec{i} + \\ &+ (5a_3 - a_1 a_3 - 2a_1 + a_1 a_3) \vec{j} + (3a_1 - a_1 a_2 - 5a_2 + a_1 a_2) \vec{k} \\ &= (2a_2 - 3a_3) \vec{i} + (5a_3 - 2a_1) \vec{j} + (3a_1 - 5a_2) \vec{k} = \\ &= 8 \vec{i} - 14 \vec{j} + \vec{k} \end{aligned}$$

١٤

بالطريقة الأولى

$$\begin{cases} 2a_2 - 3a_3 = 8 \\ 5a_3 - 2a_1 = -14 \\ 3a_1 - 5a_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_2 = 8 + 3a_3 \Rightarrow a_2 = \frac{8+3a_3}{2} \\ 2a_1 = 5a_3 + 14 \Rightarrow a_1 = \frac{5a_3+14}{2} \end{cases}$$

$$\frac{15a_3+42}{2} - \frac{40+15a_3}{2} = 1$$

$$\Rightarrow 1 = 1 \text{ صحيحة دوماً}$$

ما أبداً دوماً، وبما أن  $a_3 \in \mathbb{R}$  اختيارياً، نجد

$$a_2 = 4 + \frac{3}{2}a_3$$

$$a_1 = 7 + \frac{5}{2}a_3$$

$$\text{وهذا } \vec{A} \left( 7 + \frac{5}{2}a_3, 4 + \frac{3}{2}a_3, a_3 \right)$$

$$\vec{B} = \left( 5 - 7 - \frac{5}{2}a_3, 3 - 4 - \frac{3}{2}a_3, 2 - a_3 \right)$$

$$\vec{B} = \left( -2 - \frac{5}{2}a_3, -1 - \frac{3}{2}a_3, 2 - a_3 \right)$$

وهذا  $\forall a_3 \in \mathbb{R}$

تمرين ١٦: إذا كان  $\phi = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$  حيث  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = 0$  عند جميع النقاط عدا (0,0,0)

الحل: لنفرض  $\phi = \frac{1}{r} = r^{-1}$  و  $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -r^{-2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -r^{-2} \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}$$

$$\vec{\nabla} \phi = -\frac{x}{r^3} \vec{i} - \frac{y}{r^3} \vec{j} - \frac{z}{r^3} \vec{k}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = \frac{\partial}{\partial x} (-x r^{-3}) + \frac{\partial}{\partial y} (-y r^{-3}) + \frac{\partial}{\partial z} (-z r^{-3})$$



$$= -r^{-3} - x \frac{\partial}{\partial x} (r^{-3}) - r^{-3} - y \frac{\partial}{\partial y} (r^{-3}) - r^{-3} - z \frac{\partial}{\partial z} (r^{-3})$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r} \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (r^{-3}) = \frac{\partial (r^{-3})}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -3r^{-4} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{3x}{r^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (r^{-3}) = \frac{\partial (r^{-3})}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = -3r^{-4} \cdot \frac{y}{r} = -\frac{3y}{r^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (r^{-3}) = \frac{\partial (r^{-3})}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = -3r^{-4} \cdot \frac{z}{r} = -\frac{3z}{r^5}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = -r^{-3} + \frac{3x^2}{r^5} - r^{-3} + \frac{3y^2}{r^5} - r^{-3} + \frac{3z^2}{r^5} =$$

$$= -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^5} (x^2 + y^2 + z^2) = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^5} r^2 = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0$$

تمرين 17: أوجد مسطح المستوى المماس للكرة عند النقطة  $(1, -1, 2)$

$$2x^2 - 3xy - 4x = 7$$

$$F(x, y, z) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3xy - 4x - 7 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x - 3y - 4 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -3x \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} |_{(1, -1, 2)} = 8 + 3 - 4 = 7$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} |_{(1, -1, 2)} = -3 \quad \frac{\partial F}{\partial z} |_{(1, -1, 2)} = 0$$

معادلة المستوى المماس

$$7(x-1) - 3(y+1) + 0(z-2) = 0$$

$$7x - 7 - 3y - 3 = 0$$

$$\boxed{7x - 3y + 8z = 26}$$

١٦

تمرین ١٧: اذاتان  $x = r \cos \theta$  و  $y = r \sin \theta$  و  $u$  دالة متغيرة

مرتبة برهان آن:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta$$



$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} [u_x \cos \theta + u_y \sin \theta] = \cos \theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} (u_x) + \sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} (u_y)$$

$$= \cos \theta \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u_x) \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} (u_x) \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \right] + \sin \theta \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u_y) \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} (u_y) \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \right] =$$

$$= \cos \theta [u_{xx} \cdot \cos \theta + u_{xy} \sin \theta] + \sin \theta [u_{yx} \cdot \cos \theta + u_{yy} \sin \theta]$$

$$= u_{xx} \cos^2 \theta + 2u_{xy} \cos \theta \sin \theta + u_{yy} \sin^2 \theta$$

$u_{xy} = u_{yx}$  دالة

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = u_x \cdot (-r \sin \theta) + u_y (r \cos \theta)$$

$$= -r u_x \sin \theta + r u_y \cos \theta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} [-r u_x \sin \theta + r u_y \cos \theta] =$$

$$= -r \left[ \cos \theta \cdot u_x + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (u_x) \right] + r \left[ -\sin \theta u_y + \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (u_y) \right]$$

$$= -r \cos \theta u_x - r \sin \theta \left[ \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} \right] -$$

$$- r \sin \theta u_y + r \cos \theta \left[ \frac{\partial u_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} \right]$$



17

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -r \cos \theta \cdot u_{xx} - r \sin \theta \left[ -r \sin \theta u_{xx} + r \cos \theta u_{xy} \right] -$$

$$-r \sin \theta u_{xy} + r \cos \theta \left[ -r \sin \theta u_{yx} + r \cos \theta u_{yy} \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -r \cos \theta u_{xx} + r^2 \sin^2 \theta u_{xx} - r^2 \sin \theta \cos \theta u_{xy} - r \sin \theta u_{xy}$$

$$- r^2 \sin \theta \cos \theta u_{xy} + r^2 \cos^2 \theta u_{yy}$$

بالتبديل لدينا

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = u_{xx} \cancel{\cos^2 \theta} + 2u_{xy} \cancel{\cos \theta \sin \theta} +$$

$$+ u_{yy} \cancel{\sin^2 \theta} + \frac{1}{r} u_{xx} \cos \theta + \frac{1}{r} u_{xy} \sin \theta - \frac{1}{r} \cos \theta u_{xx} +$$

$$- \frac{1}{r} u_{xy} \sin \theta + \sin \theta \cos \theta u_{xx} - 2 \sin \theta \cos \theta u_{xy} + \cos^2 \theta u_{yy} =$$

$$= u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

وهذا المطلوب.

تمرين 19: لتكن الدالة المتجهة  $\vec{F}(t)$  القابلة للاستيفاء على الفترة  $[a, b]$  برهان أن : (1) الرضط المتجه  $\vec{F}(t)$  لكي يكون للدالة المذكورة طول ثابت هو أن يكون  $\vec{F}(t) \perp \vec{F}'(t)$  (2) الرضط المتجه  $\vec{F}(t)$  لكي يكون للدالة المذكورة طول متغير هو أن يكون  $\vec{F}(t) \parallel \vec{F}'(t)$

الحل: (1) لنرسم الرضط: لنفرض أن الدالة  $\vec{F}(t)$  لها طول ثابت وبإتالي:

$$|\vec{F}(t)| = \text{const} \Rightarrow |\vec{F}(t)|^2 = C \Rightarrow \vec{F}(t) \cdot \vec{F}(t) = C$$

نشتق الطرفين

$$\vec{F}(t) \cdot \vec{F}(t) = 0 \quad \text{ومنه} \quad 2 \vec{F}(t) \cdot \vec{F}'(t) = 0$$

ومنه  $\vec{F}(t) \perp \vec{F}'(t)$

كفاية الرضط: لنفرض أن الدالة  $\vec{F}(t)$  تحق أن  $\vec{F}(t) \perp \vec{F}'(t)$  ومنه

$$\vec{F}(t) \cdot \vec{F}'(t) = 0 \Rightarrow 2 \vec{F}(t) \cdot \vec{F}'(t) = 0 \Rightarrow (|\vec{F}(t)|^2)' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{F}(t)|^2 = C \Rightarrow |\vec{F}(t)| = C_1$$

وهذا المطلوب.



١٨

(١) لنرسم المخطط: لنفرض أن  $\vec{F}(t)$  دالة متغيرة الطول ثابتة الجبهة ويمكن  $\vec{K}$

معالجة السرعة المجهول (الموازي)  $\vec{F}(t)$  ولنفرض  $f(t) = |\vec{F}(t)|$   
 ومنه نستطيع أن نكتب  $\vec{F}(t) = f(t) \vec{K}$  وبما أن  $\vec{K}$  متجه ثابت  
 فإن  $\vec{K}' = \vec{0}$  ومنه

$$\vec{F}'(t) = (f(t) \vec{K})' = f'(t) \vec{K} \Rightarrow \vec{F}'(t) \parallel \vec{F}(t)$$

لغاية المخطط: لنفرض أن  $\vec{F}(t) = f(t) \vec{K}$  سنناقش حالتين:

(٢) إذا كانت  $\vec{K}$  ثابتة الجبهة فإن  $\vec{F}(t)$  ثابتة الجبهة ويكون المخطط عبارة عن  
 أي يصبح  $\vec{F}(t)$  ثابتة الجبهة ومتغير الطول.

(٣) إذا كانت  $\vec{K}$  متغيرة الجبهة عندئذ:

$\vec{F}'(t) = f'(t) \vec{K} + f(t) \vec{K}'$   
 ولنسألنا أنفسنا  $\vec{F}(t) \parallel \vec{F}'(t)$  مرضا؟ فإن  $\vec{F}(t) \times \vec{F}'(t) = \vec{0}$  ومنه

$$\vec{0} = \vec{F}(t) \times \vec{F}'(t) = (f(t) \vec{K}) \times (f'(t) \vec{K} + f(t) \vec{K}') =$$

$$= f^2(t) (\vec{K} \times \vec{K}') = 0$$

وبما أن  $f^2(t) \neq 0$  فإن  $\vec{K} \times \vec{K}' = \vec{0}$  أي  $\vec{K} \parallel \vec{K}'$  و  $\vec{K} \neq \vec{0}$  و  $\vec{K}' \neq \vec{0}$   
 ومنه  $\vec{K}$  متجه ثابت الجبهة ومتغير الطول. وهذا غير ممكن وغير ثابتة بالطولها وبما أن  $\vec{K}$  متجه  
 عمودي عليه أي  $\vec{K} \cdot \vec{K}' = 0$  إذا  $\vec{K}$  متجه ثابتة الجبهة وبما أن  $\vec{F}(t)$  متجه  
 ثابتة الجبهة وهو المطلوب.

مخرجة المثال: إذا كان

$$\vec{A} = 5t^2 \vec{i} + t \vec{j} - t^3 \vec{k}$$

$$\vec{B} = \sin t \vec{i} - \cos t \vec{j}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

الحل:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = 10t \vec{i} + \vec{j} - 3t^2 \vec{k}$$

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$$

14

$$\frac{d}{dt} (\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt} =$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10t & 1 & -3t^2 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix} = -3t^2 \cos t \vec{i} - 3t^2 \sin t \vec{j} + (-10t \cos t - \sin t) \vec{k}$$

$$\vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5t^2 & t & -t^3 \\ \cos t & \sin t & 0 \end{vmatrix} = t^3 \sin t \vec{i} - t^3 \cos t \vec{j} + (5t^2 \sin t - t \cos t) \vec{k}$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{A} \times \vec{B}) = (-3t^2 \cos t + t^3 \sin t) \vec{i} + (-3t^2 \sin t - t^3 \cos t) \vec{j} + (-10t \cos t - \sin t + 5t^2 \sin t) \vec{k}$$

حاجبة افر

$$\frac{d}{dt} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} = 10t \sin t - \cos t$$

$$\vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} = 5t^2 \cos t + t \sin t$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = 10t \sin t - \cos t + 5t^2 \cos t + t \sin t$$

عمر: 111: أرفيد معدلة المستوى اعين للسطح

$$x^3 + 3xy^2 + 2y^3 - z^3 = 5$$

كنا نقطة  $P(1,1,1)$

$$\frac{x^3 + 3xy^2 + 2y^3 - z^3 - 5}{1} = 0 \quad \text{السطح لينا معدلة}$$

$f = (x, y, z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3xz + 6y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3xy - 3z^2$$



۱۱۰

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{(1,1,1)} = 6 \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{(1,1,1)} = 9, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{(1,1,1)} = 0$$

معادله استواری اعظمی

$$6(x-1) + 9(y-1) + 0(z-1) = 0$$

$$6x + 9y = 15$$

تمرین ۱۱۳: اگر فرضاً معادله استواری را در یک سطح  
مستوی قرار دهیم، معادله استواری را می‌توانیم به صورت

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad y = uv, \quad z = z$$

اگرچه  $ds^2$  و عوامل القیاس  
با کویورات استواری و غیره

الک: (۱) لایه

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial z} dz$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial z} dz$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial z} dz$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}) \cdot (dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k})$$

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 du^2 + 2 \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} du dv + \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 dv^2 + \\ &+ 2 \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial z} du dz + \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 dz^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} du dv + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 du^2 \\ &+ \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 dv^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 dz^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} du dv + 2 \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial z} du dz + \\ &+ 2 \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial z} dv dz + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 du^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 dv^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial z} \right)^2 dz^2 \\ &+ 2 \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} du dv + 2 \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial z} dv dz + 2 \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial z} du dz \end{aligned}$$





$$+ 2 \left[ \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial z} \right] dv dz$$

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

بسم الله الرحمن الرحيم

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial v} = -v \vec{i} + u \vec{j}$$

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \phi^3} = \vec{k}$$

وصله لافطبا ۲۵ و دو ماه آن

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \vec{R}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \vec{R}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial z} = 0$$

$$\left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial u}\right)^2 = u^2 + v^2$$

$$\left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial v}\right)^2 = u^2 + v^2$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2 = 1$$

محي عوام القياس

عبداللہ

$$dS^2 = (u^2 + v^2) du^2 + (u^2 + v^2) dv^2 + dz^2$$

١١٢

٢ جاكربيات التحويل:

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & -v & 0 \\ v & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = u^2 + v^2$$

عنصر الحجم

$$dx dy dz = |J| du dv dz$$

$$du dy dz = (u^2 + v^2) du dv dz$$

تمرين ١١٣: (١) أوجد تحليلاً وبيانياً محطتي المجزأت التالية:

$\vec{A}(10, 30^\circ)$ ,  $\vec{B}(30, 60^\circ)$ ,  $\vec{C}(10, 120^\circ)$

(٢) بيّن أن المجزأت التالية

$\vec{a}(1, -2, 1)$ ,  $\vec{b}(2, 1, -1)$ ,  $\vec{c}(7, -4, 1)$  مرتبطة فضياً

(٣) أوجد الزاوية المحصورة بين المتجه  $\vec{OP}$  والمتجه  $\vec{OQ}$  حيث  $P(1, 2, 3)$  و  $Q(2, -3, -1)$  وأوجد مقدار  $\vec{PQ}$  (طولية)

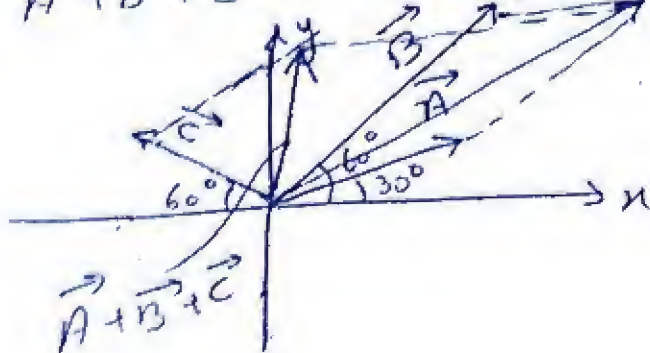
الحل: (١)

$$\vec{A}(10, 30^\circ) = 10 \cos 30^\circ \vec{i} + 10 \sin 30^\circ \vec{j} = 5\vec{i} + 5\sqrt{3}\vec{j}$$

$$\vec{B}(30, 60^\circ) = 30 \cos 60^\circ \vec{i} + 30 \sin 60^\circ \vec{j} = 15\vec{i} + 15\sqrt{3}\vec{j}$$

$$\vec{C}(10, 120^\circ) = 10 \cos 120^\circ \vec{i} + 10 \sin 120^\circ \vec{j} = -5\vec{i} + 5\sqrt{3}\vec{j}$$

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 15\vec{i} + 25\sqrt{3}\vec{j}$$





٤) لنفرض وجود الأعداد  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  بحيث  $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = \vec{0}$

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3)\vec{i} + (-2\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3)\vec{j} + (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)\vec{k} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 & \text{--- (1)} \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 & \text{--- (2)} \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \text{--- (3)} \end{cases}$$

$$2x_2 + 4x_3 = 0 \quad \text{---} \text{ takes } x_3 = t \text{ ---}$$
$$\Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}x_3$$

①  $\lambda_1 - 4\lambda_3 + 7\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3\lambda_3$

$$6\lambda_3 - 2\lambda_3 - 4\lambda_3 = 0 \Rightarrow 6\lambda_3 - 6\lambda_3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

سؤال ١٣٧

$$-3\lambda_3 + 2\lambda_3 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow -3\lambda_3 + 3\lambda_3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

اختيارية ويرجع سغلا في هذا الحلو — فضل بالكل  
 $(-3\lambda_3, -2\lambda_3, \lambda_3) \quad \forall \lambda_3 \in \mathbb{R}$

بالنسبة لـ  $\vec{b}$  نجد ان

$$(-3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}}$$

• بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

$$\vec{OP} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$$

$$\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OQ}|} = \frac{|2 - 6 - 3|}{\sqrt{1+4+9} \sqrt{4+9+1}} = \frac{7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$



(14)

مسألة 14

$$\vec{PA} = \vec{i} - 5\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$|\vec{PA}| = \sqrt{1+25+16} = \sqrt{42}$$

$$\vec{A} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{B} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

تمرين 14: (1) إذا كانت

$$(\vec{A} + 2\vec{B}) \times (2\vec{A} - \vec{B})$$

(c) أوجد مساحة متوازي الاضلاع الذي قطريه

$$\vec{A} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{B} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{A} + 2\vec{B} = 7\vec{i} + 5\vec{j}$$

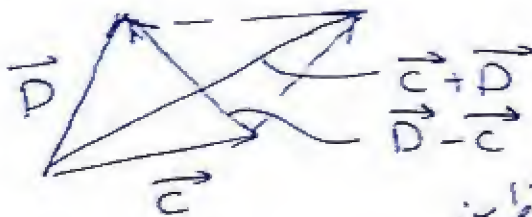
$$2\vec{A} - \vec{B} = 4\vec{i} - 5\vec{j} - 5\vec{k}$$

(الكل: 1)

$$(\vec{A} + 2\vec{B}) \times (2\vec{A} - \vec{B}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & 5 & 0 \\ 4 & -5 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -25\vec{i} + 35\vec{j} - 55\vec{k}$$

(c)



لحسب طريقة الجداء الخارجي للقطرين

$$|(\vec{C} + \vec{D}) \times (\vec{D} - \vec{C})| = |\vec{C} \times \vec{D} - \vec{C} \times \vec{C} + \vec{D} \times \vec{D} - \vec{D} \times \vec{C}|$$

$$= |(\vec{C} \times \vec{D}) + (\vec{C} \times \vec{D})| = 2|\vec{C} \times \vec{D}| = 2S$$

حيث S مساحة متوازي الاضلاع

$$S = \frac{1}{2} |(\vec{C} + \vec{D}) \times (\vec{D} - \vec{C})| = \frac{1}{2} |\vec{A} \times \vec{B}|$$

110

$$S = \frac{1}{2} |\vec{A} \times \vec{B}|$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -10\vec{i} - 14\vec{j} - 8\vec{k}$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{100 + 196 + 64} = \frac{1}{2} \sqrt{360} = \frac{1}{2} \sqrt{4(90)} = \frac{3}{2} \sqrt{40} = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{2} \sqrt{5} = 3\sqrt{10} \text{ وحدة مربعة}$$

تمرين 110: إذا كان  $\vec{A} = 3xz^2\vec{i} - yz\vec{j} + (x+2z)\vec{k}$ ، احسب  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$

جواب: إذا كانت  $\vec{r} = x^2y\vec{i} - 2y^2z\vec{j} + xy^2z^2\vec{k}$

احسب  $|\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y^2}|$

الحل: (1)

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3xz^2 & -yz & x+2z \end{vmatrix} = (0+y)\vec{i} + (6xz-1)\vec{j} + (0-0)\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = y\vec{i} + (6xz-1)\vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & 6xz-1 & 0 \end{vmatrix} = -6x\vec{i} + 0\vec{j} + (6z-1)\vec{k}$$

$$= -6x\vec{i} + (6z-1)\vec{k}$$

١١٦

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = 2xy \vec{i} + y^2 z^2 \vec{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = x^2 \vec{i} - 4yz \vec{j} + 2xy z^2 \vec{k}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^2} = 2y \vec{i}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y^2} = -4z \vec{j} + 2xz^2 \vec{k}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y^2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2y & 0 & 0 \\ 0 & -4z & 2xz^2 \end{vmatrix} = -4xy z^2 \vec{j} - 8zy \vec{k}$$

$$\left| \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y^2} \right| = \sqrt{16x^2 y^2 z^2 + 64z^2 y^2} = 4zy \sqrt{x^2 + 4}$$

تمرين ١١٦: إذا كان سطح الموجة للمغني الزائعي هو

$$\vec{r} = 3\cos 2t \vec{i} + 3\sin 2t \vec{j} + (8t - 4) \vec{k}$$

أوجد:  $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$  صيغ الوحدتين  
المتوازيات للخط واللفاف ونصف قطر الالتفاف.

الحل:

طريقة أدنى:  $\frac{d\vec{r}}{dt} = -6\sin 2t \vec{i} + 6\cos 2t \vec{j} + 8\vec{k}$

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{36 \sin^2 2t + 36 \cos^2 2t + 64} = \sqrt{100} = 10 \neq 0$$

الوسيط الراديائي

$$s = \int \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt = 10t \Rightarrow \boxed{s = 10t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dt}{ds} = \frac{1}{10}}$$

لدينا

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{10} (-6\sin 2t \vec{i} + 6\cos 2t \vec{j} + 8\vec{k})$$

$$\boxed{\vec{T} = -\frac{3}{5} \sin 2t \vec{i} + \frac{3}{5} \cos 2t \vec{j} + \frac{4}{5} \vec{k}}$$



114

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{10} \left( -\frac{6}{5} \cos 2t \vec{i} - \frac{6}{5} \sin 2t \vec{j} \right)$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = -\frac{3}{25} \cos 2t \vec{i} - \frac{3}{25} \sin 2t \vec{j}$$

$$\left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| = \sqrt{\frac{9}{625}} = \frac{3}{25} = k \quad \text{تقدّر بالمحس}$$

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{25}{3} \quad \text{لصفحة التقوس}$$

$$\boxed{\vec{N} = \frac{\frac{d\vec{T}}{ds}}{\left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|} = -\cos 2t \vec{i} - \sin 2t \vec{j}}$$

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{3}{5} \sin 2t & \frac{3}{5} \cos 2t & \frac{4}{5} \\ -\cos 2t & -\sin 2t & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{4}{5} \sin 2t \vec{i} - \frac{4}{5} \cos 2t \vec{j} + \frac{3}{5} \vec{k}}$$

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau \vec{N}$$

(معامل الالتواء)

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{10} \left[ \frac{8}{5} \cos 2t \vec{i} + \frac{8}{5} \sin 2t \vec{j} \right]$$

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{4}{25} \cos 2t \vec{i} + \frac{4}{25} \sin 2t \vec{j}$$

طريقة أخرى

$$-\tau \vec{N} = \tau \cos 2t \vec{i} + \tau \sin 2t \vec{j}$$

بالطريقة الأولى

$$\tau = \frac{4}{25} \quad \text{الالتواء، معامل الالتواء}$$

$$\rho^* = \frac{1}{\tau} = \frac{25}{4}$$

١١٨

طريقة ثانية لحساب المقوس والانساقاف

يمكن استخدام الدسائر

$$K = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}|^3}$$

$$\tau = \frac{[\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''']}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|^2}$$

$$\vec{r} = 3 \cos 2t \vec{i} + 3 \sin 2t \vec{j} + (8t - 4) \vec{k}$$

$$\vec{r}' = -6 \sin 2t \vec{i} + 6 \cos 2t \vec{j} + 8 \vec{k}$$

$$\vec{r}'' = -12 \cos 2t \vec{i} - 12 \sin 2t \vec{j}$$

$$\vec{r}''' = 24 \sin 2t \vec{i} - 24 \cos 2t \vec{j}$$

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 \sin 2t & 6 \cos 2t & 8 \\ -12 \cos 2t & -12 \sin 2t & 0 \end{vmatrix} = 96 \sin 2t \vec{i} - 96 \cos 2t \vec{j} + 72 \vec{k}$$

$$|\vec{r}' \times \vec{r}''|^2 = (96)^2 + (72)^2 = 9216 + 5184 = 14400$$

$$|\vec{r}|^3 = (36 + 64)^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{100})^3 = 1000$$

$$[\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}'''] = \begin{vmatrix} -6 \sin 2t & 6 \cos 2t & 8 \\ -12 \cos 2t & -12 \sin 2t & 0 \\ 24 \sin 2t & -24 \cos 2t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 8(12)(24) = 2304$$

$$K = \frac{\sqrt{14400}}{1000} = \frac{120}{1000} = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$$

$$\tau = \frac{2304}{14400} = \frac{4(576)}{25(576)} = \frac{4}{25}$$

مراجعة الحل

تمرين 17: ادرس النقطة ان ذكره للمختبر المعطى بالمعادلة

$$F(x,y) = (y-3)^2 - (x+2)^3 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -3(x+2)^2$$

الحل: لمبج

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2(y-3)$$

لنضع

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3(x+2)^2 = 0 \\ 2(y-3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

لدينا النقطة ان ذكره الوسيط  $(-2, 3)$  وهي تحقق معادلة  $F(x,y)=0$  مما جوبه المبرمج

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -6(x+2)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2$$

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{(-2,3)} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right|_{(-2,3)} = 2, \quad \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right|_{(-2,3)} = 0$$

$$\Delta = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

وبالتالي النقطة ان ذكره نقطة راجع للمختبر نوع  
نوجه معادلة المعطى لدينا معادلة اميل

$$m^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2m \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$$

ومعادلة المعطى (مستقيمة) يمر بالنقطة  $(-2, 3)$  ومنه معادلة

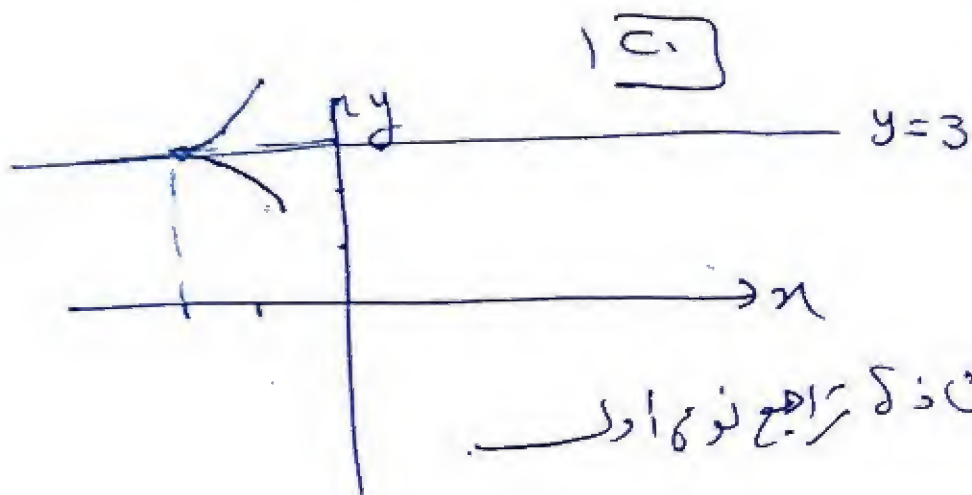
$$\boxed{y = 3}$$

ولدينا معادلة المعطى

$$(y-3)^2 = (x+2)^3$$

$$y = 3 \pm \sqrt{(x+2)^3}$$





والتفتة ان ذكر ارجع نومه ادر

انقر

نه باه صحت